УДК 511.2

А. МАХМУДОВ

 К ВЫЧИСЛЕНИЮ КОЛИЧЕСТВА ПРОСТЫХ

 ЧИСЕЛ И ПАР ПРОСТЫХ-БЛИЗНЕЦОВ

На основе решета Эратосфена предлагается простейший алгоритм вычисления количества простых чисел.

Приведён алгоритм определения количества пар простых-близнецов.

Используется шести строчная матрица из чисел и условие минимального использования деления чисел в процессе вычислений. Не используется модульная арифметика.

Ключевые слова: решето Эростафена, простые числа, квазипростые числа, алгоритмы вычисления простых чисел, количество простых чисел, простые-близнецы.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что проблема вычисления простых чисел имеет очень давнюю историю. Еще во втором веке до н. э. греческим ученым Эратосфеном предложен метод вычисления простых чисел на основе так называемого “решета Эратосфена“. Согласно данного метода [1], вначале выписываются все нечетные числа меньшие некоторого числа . Затем берется число 3, и оставляя его, вычеркиваются все числа, меньшие  но кратные трём (это числа 9,15, 21, 27, …). Далее берутся последовательно числа 5, 7,11, … и делается тоже самое. Таким образом из ряда нечетных чисел убираются составные числа. В данной заметке предлагается усовершенствовать метод Эратосфена без отыскивания кратных чисел.

Постановка задачи

Одними из важнейших проблем теории чисел являются задачи вычисления последовательности простых чисел и их количества. Уже созданы эффективные алгоритмы проверки простоты натуральных чисел и факторизации (например алгоритм Ферма и квантовые алгоритм Шора [2]). Однако, очень трудоёмкой остаётся решение задачи проверки простоты для больших чисел. В этой связи возникает необходимость рассмотреть также возможность решения этой задачи на основе элементарной арифметики, без использования модульной арифметики, избегая, трудоёмкого процесса деления. В данной заметке предлагается модифицировать метод Эратосфена без отыскивая кратных чисел и предложен алгоритм вычисления количества пар простых-близнецов.

Метод решения

Создание алгоритма составления последовательности простых чисел, определения количества простых чисел и пар простых-близнецов на основе вычисления составных чисел с иллюстрацией действий на простейшем примере.

Алгоритм вычисления последовательности и количества простых чисел и пар простых-близнецов.

С целью решения данной задачи, рассмотрим [3]. следующую матрицу из чисел:



 Автором [3] предложено считать строки матрицы, начинающиеся с чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5 соответственно строками с индексами нуль, один и т.д. А столбец крайний слева считать соответственно столбцом с индексом нуль, следующий - с индексом один и т.д.

Нетрудно видеть, что числа  данной шести строчной матрицы  находятся в столбце с индексом , строке с индексом  и вычисляются, согласно, соотношения:

, (1)

где 

 В приведенной шести строчной матрице, числа в строках с индексами нуль, два и четыре - четные числа и соответственно делятся на число два, а числа из ряда, соответствующего индексу три, делятся на три.

В строках с индексами один и пять, приведенной матрицы, находятся простые числа, а также составные (квазипростые), выделенные в кавычки, числа. Автором последовательности чисел  названы квазипростыми рядами чисел.

Из (1) следует, что числа  могут быть представлены в форме:

 (2)

 (3)

 (4)

Из соотношений (2) – (4) следует, что при условии, когда  или  равны нулю и других вариантов нет, числа  будут простыми, в остальных случаях составными, причем составные числа (согласно (2) – (4)) будут произведениями из чисел квазипростого ряда.

Задачу вычисления простых чисел сформулируем следующим образом: пусть дано некоторое число  принадлежащее квазипростому ряду чисел. Требуется, из ряда нечетных чисел выделить простые числа.

Следуя древней традиции, выпишем сначала все нечетные числа (меньшие или равные ), хотя можно сразу выписать числа квазипростого ряда. Следующим действием алгоритма будет выполнение умножения числа 3 само на себя и на все остальные числа выписанного ряда, при условии, что вычисленное произведение не больше . Пересчитаем и вычеркнем из исходного ряда составные числа, совпавшие с числами этого ряда. Это будут числа: Далее, для полученного усеченного ряда, выполняются те же действия, но с числом 5. При этом, составные числа  нужно будет вычеркнуть из списка квазипростых чисел. Процесс останавливается, когда алгоритм достигнет некоторого числа , такого, что . Например, если , то из списка нечетных чисел будут вычеркнуты все числа делящиеся на 3 ( четвертый ряд чисел из приведенной таблицы), числа ,., так как . Количество простых чисел будет:  плюс число два (итого ).

Рассмотрим теперь вопрос вычисления количества пар простых-близнецов для случая, когда . Вычислим произведения числа 5 на все числа квазипростых рядов приведенной матрицы, при условии, что вычисляемые произведения  . Это будут числа:

5, 25, 35, 55, 65, 85, 95, 115, 125, 145, 155, 175, 185, 205, 215, 235, 245, 265, 275, 295, 305, 325, 335.

Нетрудно определить, что количество составных чисел, при этом, будет равно , так как ,  располагается в столбце  (ибо , к индексу  добавляем единицу, что дает нам число столбцов равное ), а значит общее число чисел (исключая числа ) будет равно .

Теперь вычислим произведения числа  на все числа квазипростых рядов приведенной матрицы при условии, что вычисляемые произведения  . Это будут числа:

.

Здесь и далее в скобки заключены числа ранее вычисленные и использованные при определении количества составных чисел.

Точно также определим количество составных чисел. Оно равно  (исключаем дополнительно учтенные ранее числа , а также числа ).

Далее вычислим произведения числа  на все числа квазипростых рядов приведенной матрицы при условии, что вычисляемые произведения  . Это будут числа:

 .

 Количество составных чисел будет равно(исключаются дополнительно учтенные ранее числа , а также числа ).

Вычислим произведения числа  на все числа квазипростых рядов приведенной матрицы при условии, что вычисляемые произведения  . Это будут числа:

.

Количество составных чисел будет равно(исключаются дополнительно учтенные ранее числа , а также числа ).

Вычислим произведения числа  на все числа квазипростых рядов приведенной матрицы при условии, что вычисляемые произведения  . Это будут числа:

.

Количество составных чисел будет равно(исключаются дополнительно учтенные ранее числа , а также числа ).

В итоге, составных чисел, меньших 341, будет .

Рассмотрим теперь вопрос о численности простых-близнецов при . Известно, что простые-близнецы чисел есть пары чисел  . Из шести строчной матрицы, приведённой выше, следует, что в квазипростых рядах чисел можно выделить также пары чисел “составные-близнецы“ и “смешанные-близнецы“. Это соответственно следующие пары чисел:





 Сформируем фиктивную пару , где составное либо простое число и равно, еслипредставимо в виде , или же , если представимо в виде . В наших вычислениях число всегда входит в численность квазипростых рядов и, следовательно, её нужно убирать в составе фиктивной пары для вычисления количества пар простых-близнецов. С другой стороны, после проведённых вычислений, к количеству пар простых-близнецов необходимо добавить пару .

 Исходя из вышеизложенного запишем следующую формулу устанавливающую зависимость количества пар простых-близнецов от “составных-близнецов“ и “смешанных-близнецов“:

,

где  - количество пар простых-близнецов,

- количество пар “составных-близнецов”,

- количество пар “смешанных-близнецов“.

Для нашего примера .

 Заключение

 На основе приведенной простейшей модификации метода решета Эратосфена, возможно создание (наряду с известными методами, изложенными в [1,3]) несложных алгоритмов для выявления последовательности простых чисел, их количества, уменьшить количество вычислительных операций за счет неиспользования деления чисел. Предложен алгоритм вычисления количества пар простых-близнецов.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ишмухаметов Ш.Т. Методы факторизации натуральных чисел: учебное пособие / Казань: Казан. Ун. 2011. 190 с.
2. Нильсен М. Чанг И. Квантовое исчисление и квантовая информация. Пер. с англ. – М: Мир, 2006 г. – 824 с
3. Махмудов А. О приложениях индексных арифметик Пифагора // Современное состояние и перспективы применения цифровых технологий и ИИ в управлении. Сборник докладов Республиканской научно-технической конференции. Ташкент: РИИ ЦТ и ИИ, 2021, С. 279-293. (Электронная версия доклада также в http:// speclabngmk.narod.ru).